巾が負の古田不等式(作用素不等式とその周辺)

棚橋, 浩太郎

数理解析研究所講究録
903 巻 1995 年 78-96

巾が負の古田不等式

東北薬科大学　棚橋　浩太郎　(Kôtarô Tanahashi)

[概要]

複素ヒルベルト空間上の有界線形作用素 A, B が $O \leq B \leq A$ を満たすとする。古田不等式は実数 $0 \leq p, q, r$ が

$$1 \leq q,\ p+2r \leq (1+2r)q$$

を満たすならば

$$(A^r B^p A^r)^{\frac{1}{q}} \leq A^{\frac{p+2r}{q}}, \quad B^{\frac{p+2r}{q}} \leq (B^r A^p B^r)^{\frac{1}{q}}$$

が成立するという不等式であった。この論文の目的は巾 p, q, r が負の場合にも p, q, r が一定の条件を満たせばこの不等式が成立することを示すことである。

[本論]

次の古田不等式を考える。

[定理 1 ([2])]

$O \leq B \leq A$ となる複素ヒルベルト空間上の有界線形作用素 A, B に対し実数 $0 \leq p, q, r$ が

$$1 \leq q,\ p+2r \leq (1+2r)q \tag{1}$$

を満たすならば次の不等式が成立する。

$$(A^r B^p A^r)^{\frac{1}{q}} \leq A^{\frac{p+2r}{q}} \tag{2}$$

$$B^{\frac{p+2r}{q}} \leq (B^r A^p B^r)^{\frac{1}{q}} \tag{3}$$

現在この不等式の拡張、応用がさかんにされているが前に筆者 ([6]) はこの範囲 (1) が不思議に思えたので何とか理解しようとしているうちにこの範囲が best possible であること、つまり $q < 1$ または $(1+2r)q < p+2r$ ならばこの不等式は成立しないことが証明できたので昨年のこの研究集会で話した。

ところでこの不等式は A, B が可逆とすると巾 p, q, r が負の場合もありうるわけで、前に学会で吉野 ([7]) が、巾 p, q, r が負でも、ある場合にこの不等式が成立することを報告している。また、つい最近、藤井、古田、亀井 ([1]) はもっと広い場合でも成立することを示している。

この不等式の見方として $0 \leq B \leq A$ の順序が保存されるのはいつかという見方をすると巾 p, q, r が負の場合を考えるのは自然な発想だと思われる。ここではこの不等式をみたす p, q, r の範囲が負の場合にどうなるか調べた結果を報告する。

さて (1) 等の範囲を決める場合 A, B は $A+\varepsilon I, B+\varepsilon I$ $(0<\varepsilon)$ とおいて A, B は可逆としてよい。また可逆な A, B については

$$O \leq A \leq B \Longleftrightarrow O \leq B^{-1} \leq A^{-1}$$

であることから A, B が (2) を満たすことと (3) を満たすことは同値になることがわかっている。

また (2), (3) を満たす可逆な A, B について両辺の逆元をとると $p'=p, q'=-q, r'=r$ とおいて (2), (3) の不等号が反対の不等式

$$(2)' \qquad \left(A^{r'}B^{p'}A^{r'}\right)^{\frac{1}{q}} \geq A^{\frac{p'+2r'}{q'}}$$

$$(3)' \qquad B^{\frac{p'+2r'}{q'}} \geq \left(B^{r'}A^{p'}B^{r'}\right)^{\frac{1}{q}}$$

が現れる。従って p, q, r を 1 組固定したとき p, q, r に対して (2), (3) が成立することと $p, -q, r$ に対して (2)′, (3)′ が成立することは同値になる。また (2) , (3) で p, q, r を $-p, -q, -r$ とおくと同じ式になるので p, q, r に対して (2) , (3) が成立することと $-p, -q, -r$ に対して (2) , (3) が成立することは同値になる。

従って (2), (3) が成立するような p, q, r の範囲を決定するためには

$$0 \leq p, \quad 0 < q, \quad -\infty < r < \infty$$

の場合に (2) が成立する p, q, r の範囲を決定するとよいことになる。

すでに知られている結果も含めてまとめると得られた結果は次のようになる。

[定理 2 (古田、吉野、藤井、亀井、棚橋)]

複素ヒルベルト空間上の有界線形作用素 A, B が $O \leq B \leq A$ を満たすとする。また

$$0 \leq p, \quad 0 < q, \quad -\infty < r < \infty$$

とする。(r が負の場合はさらに A, B は可逆とする。) このとき実数 p, q, r が次の図 (I) , (II) , $\cdots$, (VII) の斜線の範囲であれば

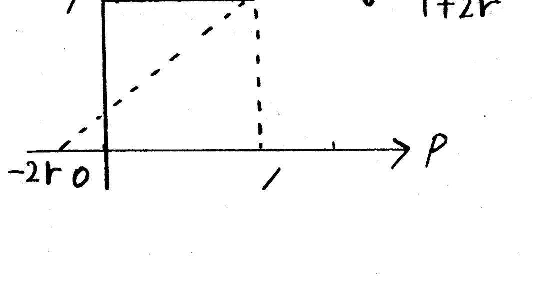
$$(2) \qquad (A^r B^p A^r)^{\frac{1}{q}} \leq A^{\frac{p+2r}{q}}$$

$$(3) \qquad B^{\frac{p+2r}{q}} \leq (B^r A^p B^r)^{\frac{1}{q}}$$

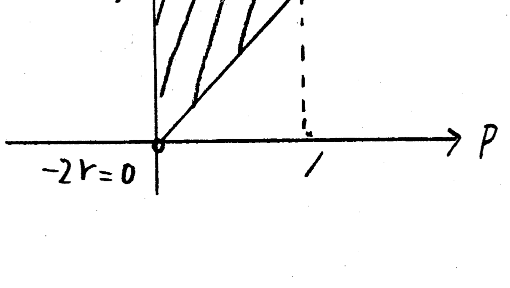
が成立する。(境界、実線部分を含む。)

またこの範囲は $-\dfrac{1}{4} < r < 0$ の一部を除いて best possible である。つまり p, q, r が斜線の範囲になければ不等式 (2) , (3) は成立しない。

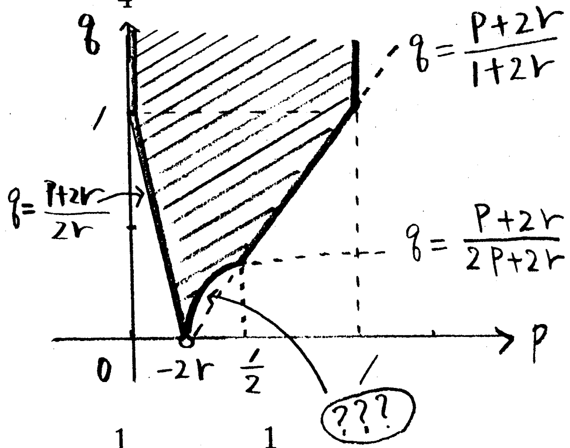
(I) $0 < r$



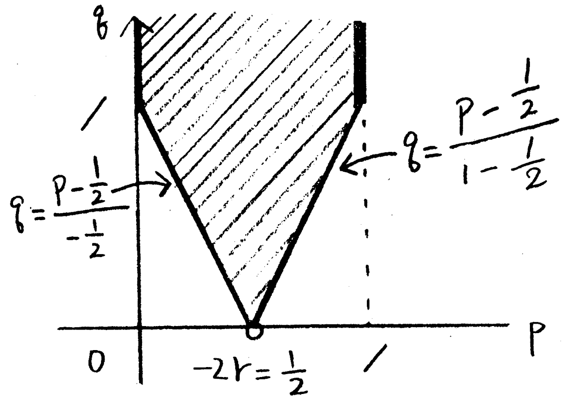
(II) $r = 0$



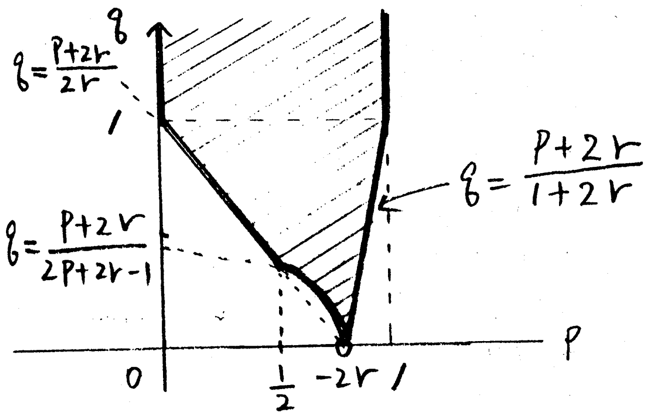
(III) $-\frac{1}{4} < r < 0$



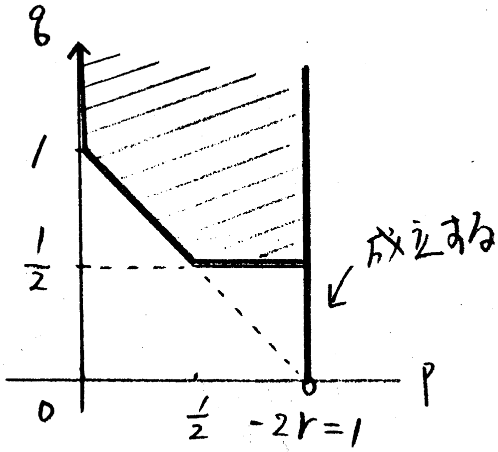
(IV) $r = -\frac{1}{4}$



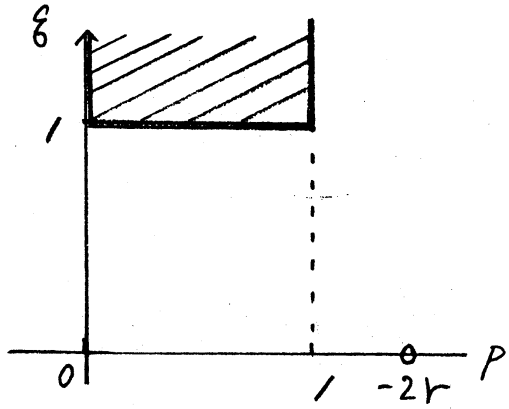
(V) $-\frac{1}{2} < r < -\frac{1}{4}$



(VI) $r = -\frac{1}{2}$



(VII) $r < -\frac{1}{2}$



さていくつか準備をする。
次はよく知られた Löwner-Heinz の不等式であるが、古田不等式の出発点でもある。

[命題 3 ([4] , [5])]

複素ヒルベルト空間上の有界線形作用素 A, B が $O \leq B \leq A$ を満たすとする。このとき

$$0 < p < 1 \Longrightarrow B^p \leq A^p$$

が成立する。

次は古田 ([2]) によって示された面白い補題である。

[補題 4 ([2])]

複素ヒルベルト空間上の有界線形作用素 A, B が $O \leq B, A$ を満たすとする。このとき実数 $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して

$$(ABA)^\lambda = AB^{\frac{1}{2}}(B^{\frac{1}{2}}A^2B^{\frac{1}{2}})^{\lambda-1}B^{\frac{1}{2}}A$$

が成立する。

次は best possibility を示すときに使う補題である。

[補題 5]

実数 $a,\ b,\ d,\ \theta$ は $0 < a+b,\ ab = d^2$ を満たすとする。このとき行列

$$S = \begin{pmatrix} a & de^{-i\theta} \\ de^{i\theta} & b \end{pmatrix}$$

と正数 p に対して

$$S^p = (a+b)^{p-1}S$$

が成立する。

[証明]

行列 U を

$$U = \frac{1}{\sqrt{b^2+d^2}} \begin{pmatrix} de^{-i\theta} & b \\ b & -de^{i\theta} \end{pmatrix}$$

とおくと U はユニタリ行列で

$$U^*SU = \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

である。従って

$$
\begin{aligned}
S^p &= U(U^*SU)^pU^* \\
&= U\begin{pmatrix}(a+b)^p & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}U^* \\
&= (a+b)^{p-1}S
\end{aligned}
$$

である。 [証明終]

[定理 1 の証明]

(I)
斜線部分は古田不等式 ([2]) である。 Best possibility は棚橋 ([6]) による。
ここでは後でも同様の計算を行うので参考のために証明の概略を述べる。

$$
A=\begin{pmatrix} a & \sqrt{\varepsilon(a-b-\delta)}\\ \sqrt{\varepsilon(a-b-\delta)} & b+\varepsilon+\delta\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}
$$

$$
0\le b\le 1\le a,\ 0\le\varepsilon,\ 0\le\delta,\ \varepsilon(1-b)\le\delta(a-1+\varepsilon)
$$

とおくと

$$
O\le B\le A
$$

である。ここで (2) が成立すると仮定すると

$$
\begin{aligned}
&a^{2r}b^{2r}(1-b^p)^2(a^{\frac{p+2r}{q}}-b^{\frac{p+2r}{q}})(a^{\frac{2r}{q}}-b^{\frac{p+2r}{q}})\left(1+\frac{o}{\varepsilon}\right)\le\\
&a^{\frac{2r}{q}}b^{\frac{p+2r}{q}}(a-b)(a^{2r}-b^{p+2r})^2(a^{\frac{p}{q}}-1)\left(\frac{-(1-b^p)(a^{2r}-b^{2r})}{q(a-b)(a^{2r}-b^{p+2r})}+\frac{p}{qb}\frac{\delta}{\varepsilon}+\frac{o}{\varepsilon}\right)
\end{aligned}
$$

となる。ただし

$$
\frac{o}{\varepsilon}\to 0\quad(\varepsilon\to +0)
$$

である。
ここで

$$
\delta=\frac{1-b}{a-1}\varepsilon
$$

とおいて $\varepsilon\to+0$ とすると

$$
\begin{aligned}
&q(1-a^{-1})(1-b^p)^2(1-a^{-\frac{p+2r}{q}}b^{\frac{p+2r}{q}})(1-a^{-\frac{2r}{q}}b^{\frac{2r}{q}})\le\\
&\quad a^{2r\frac{q-1}{q}}b^{\frac{p+2r}{q}-2r-1}(1-a^{-2r}b^{p+2r})(1-a^{-\frac{p}{q}})\\
&\quad\quad\times\{p(1-b)(1-a^{-1}b)(1-a^{-2r}b^{p+2r})-b(1-b^p)(1-a^{-1})(1-a^{-2r}b^{2r})\}
\end{aligned}
$$

が得られる。

もし $0<q<1$ なら $a\to\infty$ として

$$0<q(1-b^p)^2\le 0$$

となるがこれは矛盾である。また $(1+2r)q<p+2r$ なら $b\to+0$ として

$$0<q(1-a^{-1})\le 0$$

となるがこれも矛盾である。

(II)
命題 3 である。

(III) , (IV) , (V)
斜線部分で (2) が成立することを示す。命題 3 より $-\frac{1}{2}<r<0$ のとき

$$O\le A^{2r}\le B^{2r}$$

である。よって補題 4 より

$$(A^rB^pA^r)^{\frac{1}{q}}=A^rB^{\frac{p}{2}}\left(B^{\frac{p}{2}}A^{2r}B^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{1}{q}-1}B^{\frac{p}{2}}A^r$$

$0\le\frac{1}{q}-1\le 1$ なら　　$\Downarrow$　（イ）

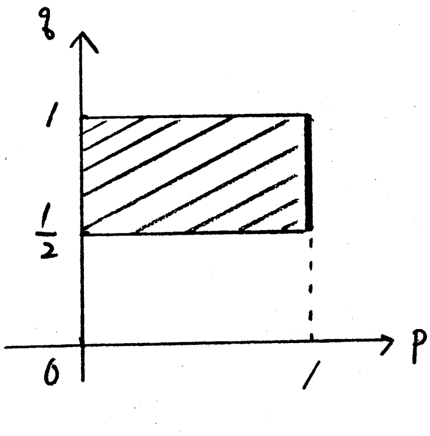
$$\le A^rB^{\frac{p}{2}}(B^{\frac{p}{2}}B^{2r}B^{\frac{p}{2}})^{\frac{1}{q}-1}B^{\frac{p}{2}}A^r=A^rB^{\frac{p+2r}{q}-2r}A^r$$

$0\le\frac{p+2r}{q}-2r\le 1$ なら　　$\Downarrow$　（ロ）

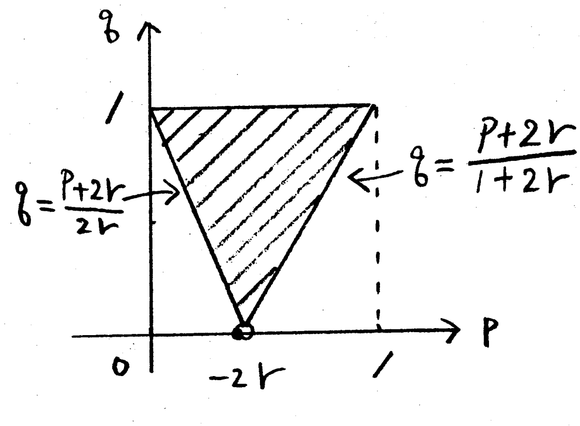
$$\le A^rA^{\frac{p+2r}{q}-2r}A^r=A^{\frac{p+2r}{q}}$$

となる。ここで（イ），（ロ）の範囲は次のようになる。

（イ）

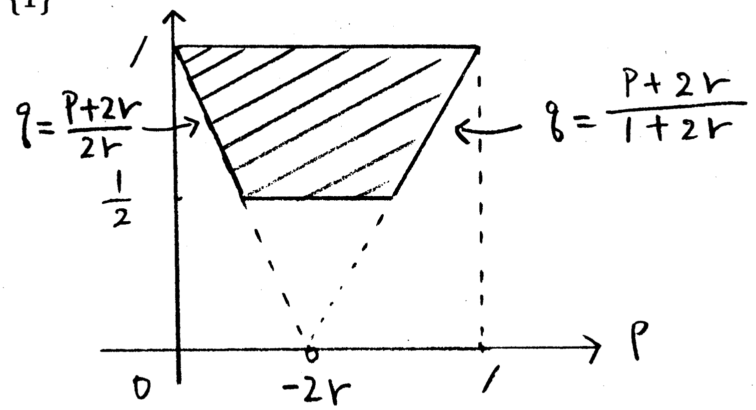


（ロ）



従って次の斜線の範囲 $\{1\}$ で (2) が成立していることが示された。

$\{1\}$



次にこの $\{1\}$ を用いて $\dfrac{1}{3} \le q < \dfrac{1}{2}$ の場合に

(イ) $$\left(B^{\frac{p}{2}}A^{2r}B^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{1}{q}-1} \le \left(B^{\frac{p}{2}}B^{2r}B^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{1}{q}-1}$$

を満たす p, q, r を探す。まず

$$\frac{p}{2} = r' > 0, \quad 2r = p' < 0, \quad \frac{1}{q} - 1 = \frac{1}{q'} > 0$$

とおくと（イ）は

$$\left(B^{r'}A^{p'}B^{r'}\right)^{\frac{1}{q'}} \le \left(B^{r'}B^{p'}B^{r'}\right)^{\frac{1}{q'}} = B^{\frac{p'+2r'}{q'}}$$

になる。この式は

$$A^{\frac{p'+2r'}{q'}} \le \left(A^{r'}B^{p'}A^{r'}\right)^{\frac{1}{q'}}$$

と同値である。両辺の逆元をとると

$$\left(A^{-r'}B^{-p'}A^{-r'}\right)^{\frac{1}{q'}} \le A^{\frac{-p'-2r'}{q'}}$$

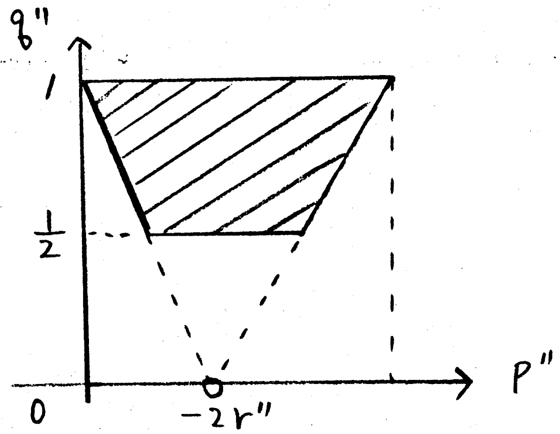
となるので、また

$$p'' = -p' > 0, \quad r'' = -r' < 0, \quad q'' = q'$$

とおくと

$$\left(A^{r''}B^{p''}A^{r''}\right)^{\frac{1}{q''}} \le A^{\frac{p''+2r''}{q''}}$$

と同値である。ところでこの式を満たす p'', q'', r'' はさっき示した $\{1\}$ から

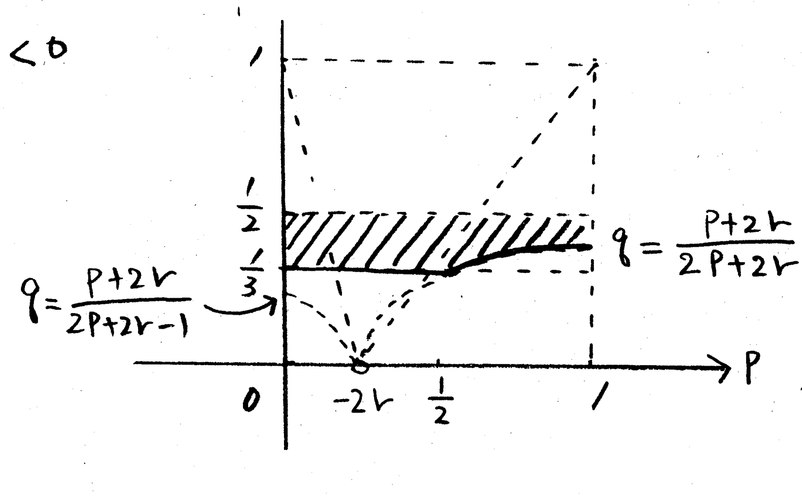


の範囲でいいのでこれらをもとの p, q, r

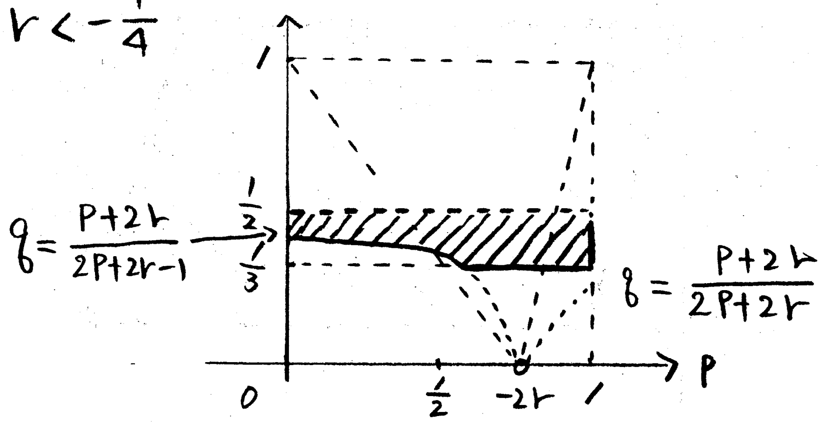
$$p = 2r' = -2r'', \quad r = \frac{p'}{2} = -\frac{p''}{2}, \quad q = \frac{q'}{q'+1} = \frac{q''}{q''+1}$$

にもどすと（イ）を満たす p, q, r は

$-\frac{1}{4} < r < 0$



$-\frac{1}{2} < r < -\frac{1}{4}$

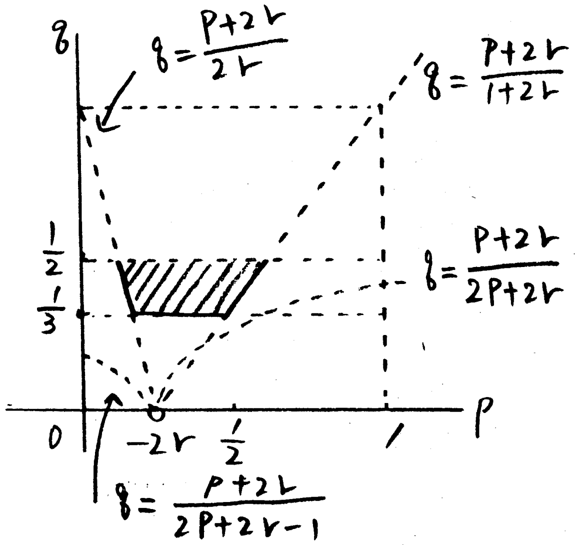


となって$\frac{3}{1} \leq q < \frac{1}{2}$の場合に（イ） が成立する範囲がでてきた。

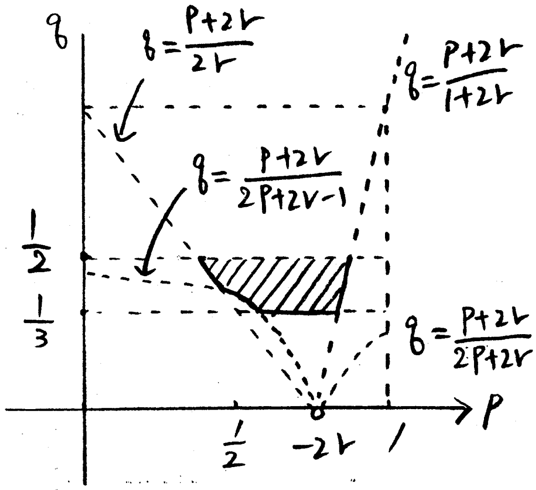
よって前と同じ議論から（ロ）の範囲とあわせて$\frac{1}{3} \leq q < \frac{1}{2}$の場合に次の範囲 $\{2\}$ で (2) が成立することが示される。

$\{2\}$　$\frac{1}{3} \leq q < \frac{1}{2}$

$-\frac{1}{4} < r < 0$



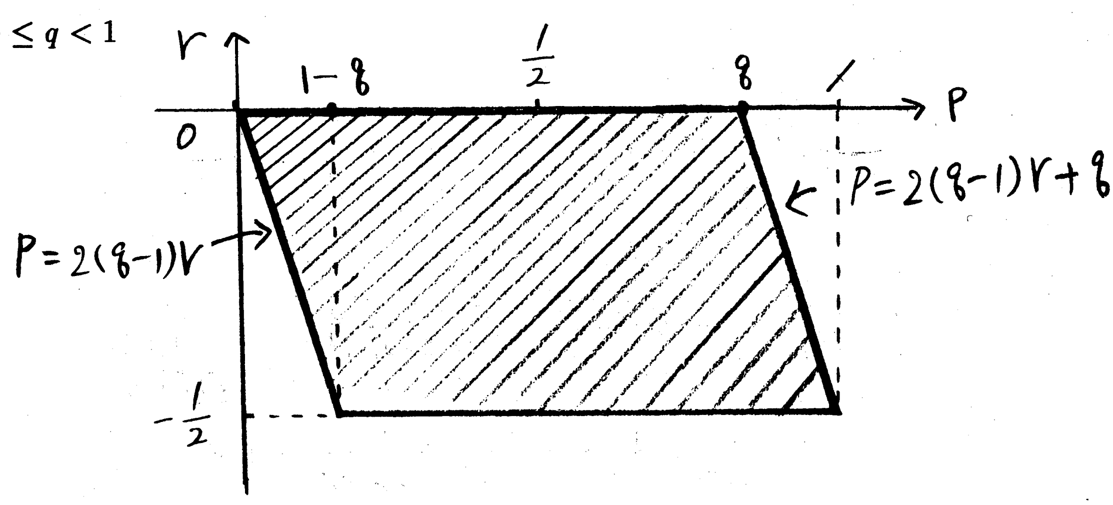
$-\frac{1}{2} < r < -\frac{1}{4}$



以下この操作を繰り返すが、この図だと $q = \frac{1}{n}, q = \frac{p+2r}{2p+2r}, q = \frac{p+2r}{2p+2r-1}$ の大小関係が複雑で証明の場合分けが面倒になる。よって以下 q を固定して p, r の範囲を図にかいて q に関する帰納法で示す。

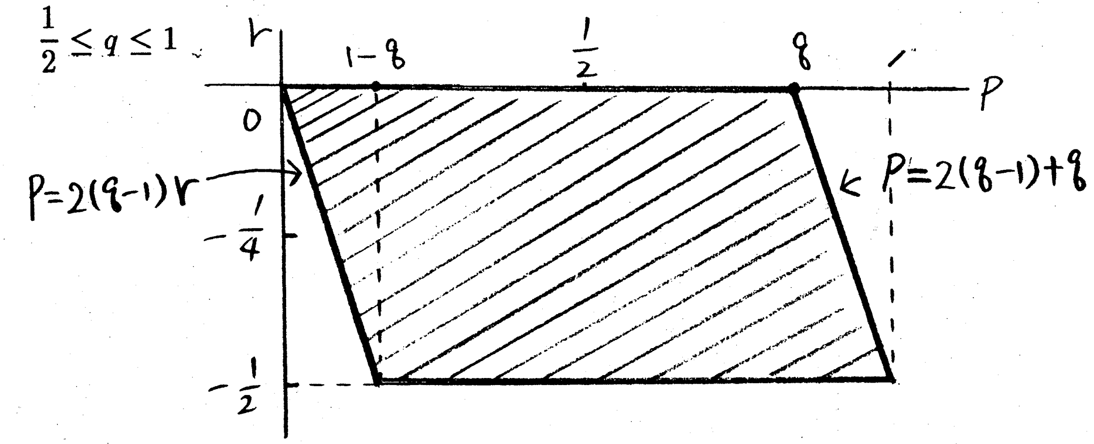
$\frac{1}{2} \leq q < 1$ とする。このとき（イ） は成立している。また（ロ）の範囲は次のようになる。

$\frac{1}{2} \leq q < 1$



さて $\{1\}$ の範囲は $\dfrac{1}{2} \leq q \leq 1$ では前の図と同じ

$\{1\}$ $\quad \dfrac{1}{2} \leq q \leq 1$



である。前と同様にして

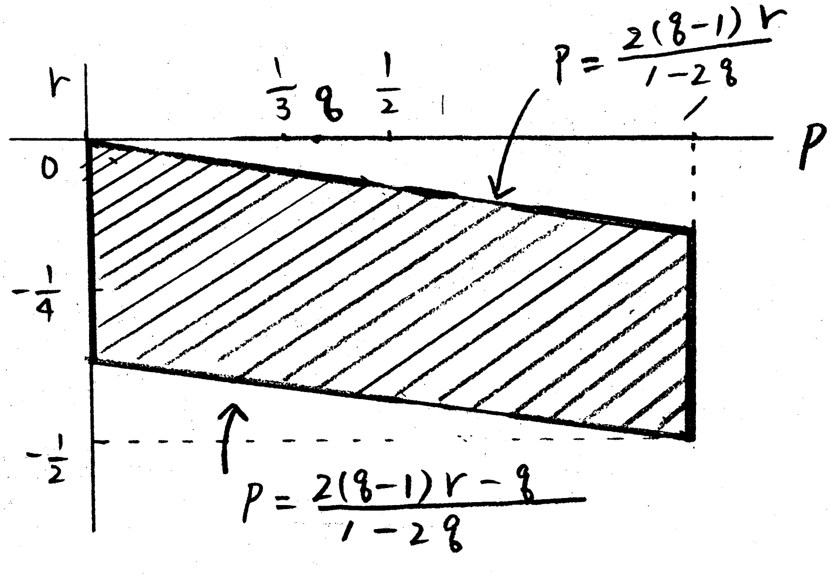
$$(p'', q'', r'') \in \{1\} \Longrightarrow \left(A^{r''} B^{p''} A^{r''}\right)^{\frac{1}{q''}} \leq A^{\frac{p''+2r''}{q''}}$$

となるので $p = -2r'', r = -\dfrac{p''}{2}, q = \dfrac{q''}{q''+1}$ に対して

(イ) $$\left(B^{\frac{p}{2}} A^{2r} B^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{1}{q}-1} \leq \left(B^{\frac{p}{2}} B^{2r} B^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{1}{q}-1}$$

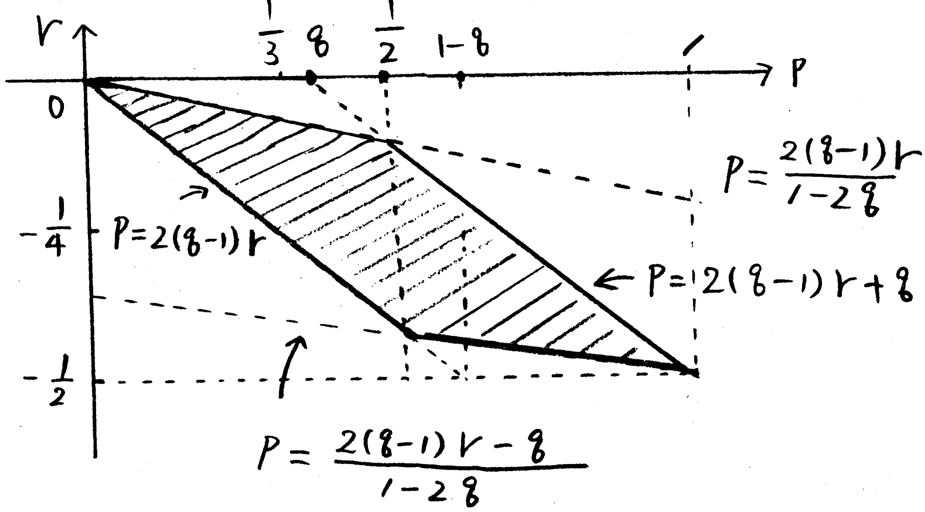
が成立する。従って $(p'', q'', r'') \in \{1\}$ を (p, q, r) に戻して次の範囲で（イ） が成立する。

$\dfrac{1}{3} \leq q < \dfrac{1}{2}$



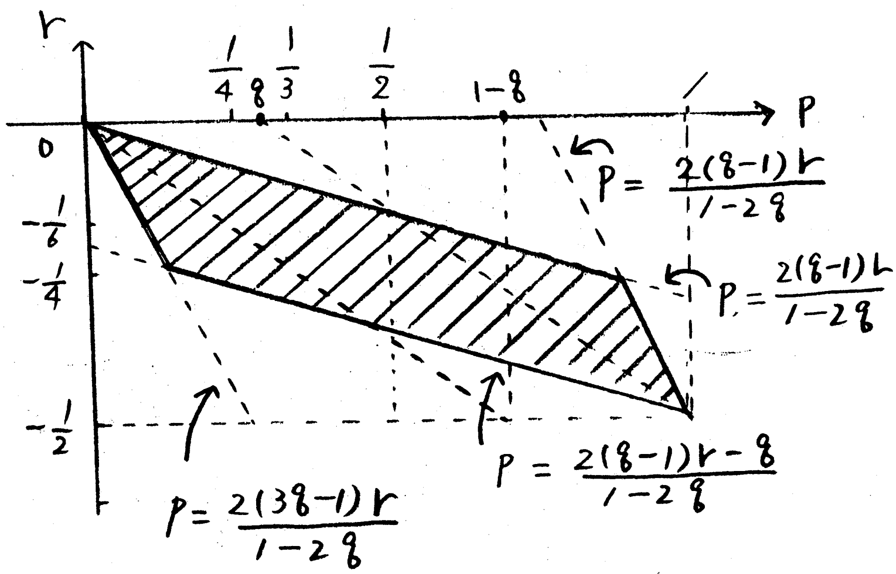
従って前と同じ議論から（ロ）の範囲とあわせて$\frac{1}{3} \leq q < \frac{1}{2}$の場合に次の範囲 {2} で (2) が成立するすることが示される。

{2} $\frac{1}{3} \leq q < \frac{1}{2}$



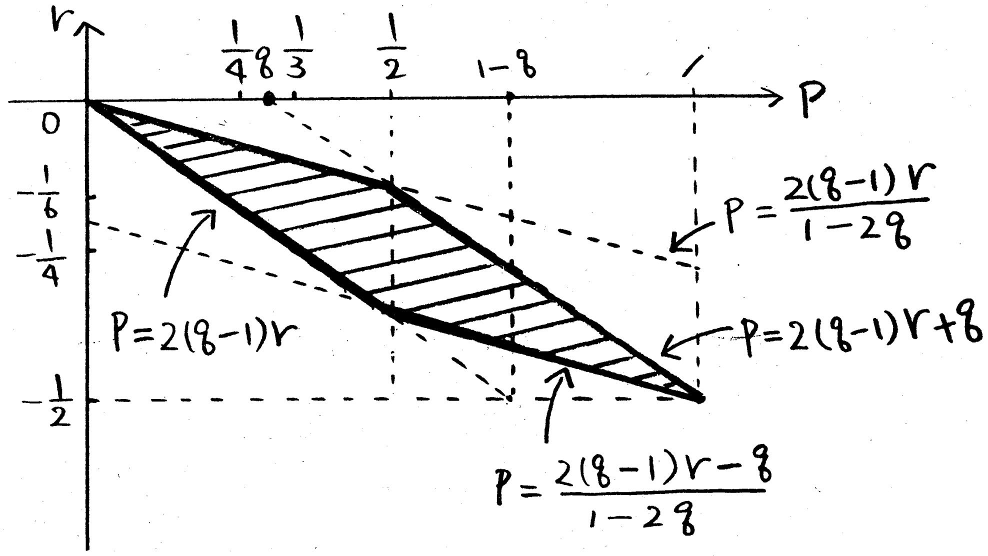
次に同様にしてまた {2} から$\frac{1}{4} \leq q < \frac{1}{3}$の場合に（イ）が成立する範囲を求めると次のようになる。

$\frac{1}{4} \leq q < \frac{1}{3}$



従って前と同じ議論から（ロ）の範囲とあわせて $\frac{1}{4} \leq q < \frac{1}{3}$ の場合に次の範囲 $\{3\}$ で (2) が成立することが示される。

$\{3\}$ $\quad \frac{1}{4} \leq q < \frac{1}{3}$



以下この操作を繰り返せば $\frac{1}{n+1} \leq q < \frac{1}{n}$ の場合に次の4直線で囲まれた範囲 $\{n\}$

$$2(q-1)r \leq p \leq 2(q-1)r + q, \quad \frac{2(q-1)-r}{1-2q} \leq p \leq \frac{2(q-1)r}{1-2q}$$

で (2) が成立することが示される。 よって $-\frac{1}{2} < r < 0$ の場合、斜線の範囲で (2) が成立することがわかる。

次に $-\frac{1}{2} < r < 0$ のとき $0 < p < -2r, 0 < q < \frac{p+2r}{2r}$ で (2) が成立しないことを証明する。

$A = \begin{pmatrix} a & \sqrt{\varepsilon(a-b-\delta)} \\ \sqrt{\varepsilon(a-b-\delta)} & b+\varepsilon+\delta \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, 0 < b < 1 < a, \delta = \frac{1-b}{a-1}\varepsilon \to +0$ としてさらに $a \to \infty$ とすると (2) に反する。

次に $-\frac{1}{2} < r < 0$ のとき $-2r < p, 0 < q < \frac{p+2r}{1+2r}$ で (2) が成立しないことを証明する。

もし

$$(A^r B^p A^r)^{\frac{1}{q}} \leq A^{\frac{p+2r}{q}} \tag{2}$$

が成立すると仮定すると B は可逆としても (2) は成立するはずである。ここで

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2\sqrt{c(1-c)} \\ 2\sqrt{c(1-c)} & 4c \end{pmatrix} \ (0 < c < 1),\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とおく。すると

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 2\sqrt{c(1-c)} \\ 2\sqrt{c(1-c)} & 4c \end{pmatrix}$$

は自己共役行列でその特性方程式は

$$\det(t - (A-B)) = t^2 - (1+4c)t + 4c^2$$

なので

$$O \leq A - B$$

である。また

$$V = \begin{pmatrix} \sqrt{1-c} & \sqrt{c} \\ \sqrt{c} & -\sqrt{1-c} \end{pmatrix}$$

はユニタリ行列で

$$V^*AV = \begin{pmatrix} 2+2c & 0 \\ 0 & 2c \end{pmatrix}$$

である。
ここで (2) より

$$((V^*AV)^r V^*B^pV (V^*AV)^r)^{\frac{1}{q}} \leq (V^*AV)^{\frac{p+2r}{q}}$$

となるので代入して計算すると

$$\begin{pmatrix} (2+2c)^{2r}(1-c) & (2+2c)^r(2c)^r\sqrt{c(1-c)} \\ (2+2c)^r(2c)^r\sqrt{c(1-c)} & (2c)^{2r}c \end{pmatrix}^{\frac{1}{q}} \le \begin{pmatrix} (2+2c)^{\frac{p+2r}{q}} & 0 \\ 0 & (2c)^{\frac{p+2r}{q}} \end{pmatrix}$$

となる。よって補題 5 より

$$\delta^{-1}\begin{pmatrix} (2+2c)^{2r}(1-c) & (2+2c)^r(2c)^r\sqrt{c(1-c)} \\ (2+2c)^r(2c)^r\sqrt{c(1-c)} & (2c)^{2r}c \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} (2+2c)^{\frac{p+2r}{q}} & 0 \\ 0 & (2c)^{\frac{p+2r}{q}} \end{pmatrix}$$

$$0 \le \begin{pmatrix} \delta(2+2c)^{\frac{p+2r}{q}} - (2+2c)^{2r}(1-c) & -(2+2c)^r(2c)^r\sqrt{c(1-c)} \\ -(2+2c)^r(2c)^r\sqrt{c(1-c)} & \delta(2c)^{\frac{p+2r}{q}} - (2c)^{2r}c \end{pmatrix}$$

となる。ただし

$$\delta^{-1} = \left((2+2c)^{2r}(1-c) + (2c)^{2r}c\right)^{\frac{1}{q}-1}$$

である。

従って右辺の行列式は非負なので

$$0 \le \delta^2(2+2c)^{\frac{p+2r}{q}}(2c)^{\frac{p+2r}{q}} - \delta(2c)^{\frac{p+2r}{q}}(2+2c)^{2r}(1-c) - \delta(2+2c)^{\frac{p+2r}{q}}(2c)^{2r}c$$

よって

$$(2c)^{\frac{p+2r}{q}}(2+2c)^{2r}(1-c) + (2+2c)^{\frac{p+2r}{q}}(2c)^{2r}c \le \delta(2+2c)^{\frac{p+2r}{q}}(2c)^{\frac{p+2r}{q}}$$

よって

$$\begin{aligned} &2^{\frac{p+2r}{q}}(2+2c)^{2r}(1-c) + (2+2c)^{\frac{p+2r}{q}}2^{2r}c^{1+2r-\frac{p+2r}{q}} \\ &\le \left\{(2+2c)^{2r}(1-c) + (2c)^{2r}c\right\}^{1-\frac{1}{q}}(2+2c)^{\frac{p+2r}{q}}2^{\frac{p+2r}{q}} \end{aligned}$$

となる。ここで

$$1 + 2r - \frac{p+2r}{q} < 0$$

だから $c \longrightarrow +0$ とすると

$$\infty \le \left(2^{2r}\right)^{1-\frac{1}{q}}2^{\frac{p+2r}{q}}$$

となって矛盾である。

次に $-\dfrac{1}{2} < r < -\dfrac{1}{4}$ のとき $-\dfrac{1}{2} < p < -2r, 0 < q < \dfrac{p+2r}{2p+2r-1}$ で (2) が成立しないことを証明する。

$A = \begin{pmatrix} a & \sqrt{\varepsilon(a-b-\delta)} \\ \sqrt{\varepsilon(a-b-\delta)} & b+\varepsilon+\delta \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, 0 < b < 1 < a, \delta = \dfrac{1-b}{a-1}\varepsilon \to +0$ としてさらに $b \to +0$ とすると (2) に反する。

次に $1<p$ で成立しないことを証明する。

もし

$$B^{\frac{p+2r}{q}} \le (B^r A^p B^r)^{\frac{1}{q}} \tag{3}$$

が成立すると仮定すると両辺の逆をとって

$$B^{\frac{-p-2r}{q}} \ge \left(B^{-r} A^{-p} B^{-r}\right)^{\frac{1}{q}}$$

となるがこれを

$$I \ge B^{\frac{p+2r}{2q}} \left(B^{-r} A^{-p} B^{-r}\right)^{\frac{1}{q}} B^{\frac{p+2r}{2q}}$$

と変形する。(3) が成立するなら $0<p+2r, 0<q$ よりこの式も可逆な B に対しても成立するはずである。ここで

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2\sqrt{c(1-c)} \\ 2\sqrt{c(1-c)} & 4c \end{pmatrix} \ (0<c<1),\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とおく。前の証明の

$$V = \begin{pmatrix} \sqrt{1-c} & \sqrt{c} \\ \sqrt{c} & -\sqrt{1-c} \end{pmatrix}$$

を用いて

$$I \ge B^{\frac{p+2r}{2q}} \left(B^{-r} V V^* A^{-p} V V^* B^{-r}\right)^{\frac{1}{q}} B^{\frac{p+2r}{2q}}$$

を計算すると

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ge \left\{(1-c)(2+2c)^{-p} + c(2c)^{-p}\right\}^{\frac{1}{q}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} 1 &\ge (1-c)(2+2c)^{-p} + c(2c)^{-p} \\ &= (1-c)(2+2c)^{-p} + 2^{-p} c^{1-p} \end{aligned}$$

となる。ここで $1<p$ より $c \to +0$ とすると

$$1 \ge \infty$$

となって矛盾である。

(VI)
斜線部で (2) が成立することの証明、また best possibility の証明は (III) , (IV) , (V) と同様である。

次に $r=-\frac{1}{2}, p=1$ の場合に成立することを証明する。

可逆な $O \leq A, B$ について

$$
\begin{aligned}
&\left(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{q}} \leq A^0 = I \\
&\Longleftrightarrow A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}} \leq I \\
&\Longleftrightarrow B \leq A
\end{aligned}
$$

となるので (2) は成立する。

(V)
$r < -\dfrac{1}{2}$ とする。 $0 \leq p \leq 1,\ 1 \leq q$ で成立することを証明する。

$O \leq B \leq A$ より $B^p \leq A^p$ となる。よって

$$A^r B^p A^r \leq A^{p+2r}$$

よって

$$(A^r B^p A^r)^{\frac{1}{q}} \leq A^{\frac{p+2r}{q}}$$

である。

$1 < p$ のとき成立しないことを証明する。

$0 < p + 2r$ のときは (III) , (IV) , (V) と同様である。
$p + 2r = 0$ のときは

$$
\begin{aligned}
&(A^r B^p A^r)^{\frac{1}{q}} \leq A^{\frac{p+2r}{q}} \\
&\Longleftrightarrow \left(A^r B^{-2r} A^r\right)^{\frac{1}{q}} \leq A^0 = I \\
&\Longleftrightarrow A^r B^{-2r} A^r \leq I \\
&\Longleftrightarrow B^{-2r} \leq A^{-2r}
\end{aligned}
$$

であるがこの式は $-\dfrac{1}{2} \leq r \leq 0$ のときだけ正しい。
$p + 2r < 0$ のときは (3) を

$$B^{\frac{-p-2r}{q}} \geq \left(B^{-r} A^{-p} B^{-r}\right)^{\frac{1}{q}}$$

と変形する。もし (3) が成立するならこの式も可逆な B に対して成立するはずである。
ここで

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2\sqrt{c(1-c)} \\ 2\sqrt{c(1-c)} & 4c \end{pmatrix}\ (0 < c < 1),\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とおく。また前の証明の

$$V = \begin{pmatrix} \sqrt{1-c} & \sqrt{c} \\ \sqrt{c} & -\sqrt{1-c} \end{pmatrix}$$

を用いて

$$B^{\frac{-p-2r}{q}} \geq \left(B^{-r}VV^*A^{-p}VV^*B^{-r}\right)^{\frac{1}{q}}$$

を計算すると

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \geq \left\{(1-c)(2+2c)^{-p} + c(2c)^{-p}\right\}^{\frac{1}{q}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} 1 &\geq (1-c)(2+2c)^{-p} + c(2c)^{-p} \\ &= (1-c)(2+2c)^{-p} + 2^{-p}c^{1-p} \end{aligned}$$

となる。ここで $1 < p$ より $c \to +0$ とすると

$$1 \geq \infty$$

となって矛盾である。

次に $0 \leq p \leq 1, 0 < q < 1$ で成立しないことを証明する。

もし

$$(2) \qquad (A^rB^pA^r)^{\frac{1}{q}} \leq A^{\frac{p+2r}{q}}$$

が成立すると仮定すると B は可逆としても (2) は成立するはずである。ここで

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2\sqrt{c(1-c)} \\ 2\sqrt{c(1-c)} & 4c \end{pmatrix} \ (0 < c < 1),\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とおく。また $V = \begin{pmatrix} \sqrt{1-c} & \sqrt{c} \\ \sqrt{c} & -\sqrt{1-c} \end{pmatrix}$ を用いて

$$\left((V^*AV)^r\, V^*B^pV\, (V^*AV)^r\right)^{\frac{1}{q}} \leq (V^*AV)^{\frac{p+2r}{q}}$$

を計算すると前と同様にして

$$\begin{aligned} &2^{\frac{p+2r}{q}}(2+2c)^{2r}(1-c) + (2+2c)^{\frac{p+2r}{q}}2^{2r}c^{1+2r-\frac{p+2r}{q}} \\ &\leq \left\{(2+2c)^{2r}(1-c) + (2c)^{2r}c\right\}^{1-\frac{1}{q}}(2+2c)^{\frac{p+2r}{q}}2^{\frac{p+2r}{q}} \\ &= \left\{(2+2c)^{2r}(1-c)c^{-1-2r} + 2^{2r}\right\}^{1-\frac{1}{q}}c^{(1+2r)(1-\frac{1}{q})}(2+2c)^{\frac{p+2r}{q}}2^{\frac{p+2r}{q}} \end{aligned}$$

となる。ここで

$$0<1+2r-\frac{p+2r}{q}, 0<(1+2r)\left(1-\frac{1}{q}\right)$$

だから、$c \to +0$ とすると

$$0<2^{\frac{p+2r}{q}}2^{2r} \le 0$$

となって矛盾である。

[残った問題]

$-\frac{1}{4}<r<0, \quad -2r<p<\frac{1}{2}, \quad \frac{p+2r}{1+2r} \le q < \frac{p+2r}{2p+2r}$ で古田不等式が成立するかどうかは未解決である。今までのような計算では反例はできないようである。古田不等式が成立する範囲が連続的だと仮定して $r \to -0$, $r \to -\frac{1}{4}+0$ の極限を考えるとこの範囲では古田不等式が成立すると考えたほうが自然である。従って次が成立すると予想される。

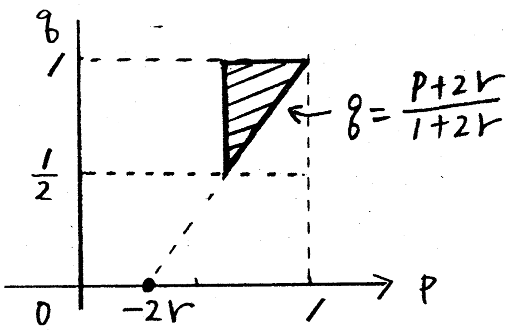
$$-\frac{1}{4}<r<0, -2r<p<\frac{1}{2} \Longrightarrow (A^rB^pA^r)^{\frac{1+2r}{p+2r}} \le A^{1+2r}$$

この予想が正しければ (2), (3) を満たす実数 p, q, r の範囲はすべて決定されたことになる。

[注意]

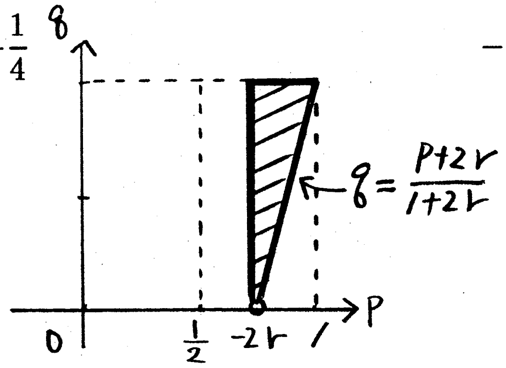
吉野 ([7]) は $-\frac{1}{2}<r<0$ の場合に次の範囲で古田不等式が成立することを示した。

また $r<-\frac{1}{2}$ の場合も示した。

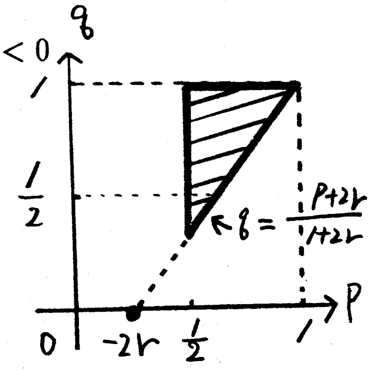


また、藤井、古田、亀井 ([1]) は $-\frac{1}{2}<r<0$ の場合に次の範囲で古田不等式が成立することを示した。

$-\frac{1}{2}<r<-\frac{1}{4}$



$-\frac{1}{4}<r<0$



[参考文献]

[1] M. Fujii, T. Furuta, E. Kamei, Complements to the Furuta inequality, Proc. of the Japan Academy **70** (1994), 239-242.

[2] T. Furuta, $A \geq B \geq O$ assures $(B^r A^p B^r)^{\frac{1}{q}} \geq B^{\frac{p+2r}{q}}$ for $r \geq 0$, $p \geq 0$, $q \geq 1$ with $(1+2r)q \geq (p+2r)$, Proc. Amer. Math. Soc. **101** (1987) 85-88.

[3] T. Furuta, Two operator functions with monotone property, Proc. Amer. Math. Soc. **111** (1991) 511-516.

[4] E. Heinz, Beiträge zur Störungstheorie der Spektralzerlegung, Math. Ann., **123** (1951) 415-438.

[5] K. Löwner, Über monotone Matrixfunktionen, Math. Z., **38** (1934) 177-216.

[6] K. Tanahashi, Best possibility of the Furuta inequality, Proc. Amer. Math. Soc., (to appear)

[7] T. Yoshino, A modified Heinz's inequality